Algebra en Meetkunde 2008

H. Waalkens

university of groningen

Exam Problem Sheet

The exam consists of 8 problems. You can achieve 60 points in total.
The number of points for each problem is marked in brackets (you get 6 points for free).
You can find the translation of the problems into Dutch below.

1. **[3 Points.]** Show that the group of units $R^\star$ of a ring R with 1 is a group with respect to multiplication.

2. **[3+2+3 Points.]** Let V be a set, R a ring, and $T = R^V$ the set of functions from V to R.

   (a) Show that R^V is a ring when addition and multiplication are defined according to

   $$\begin{aligned}(f+g)(v) &= f(v)+g(v)\,,\\ (fg)(v) &= f(v)\cdot g(v)\end{aligned}$$

   for $f, g : V \to R$ and $v \in R$.

   (b) Note that for $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, with $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, the ring R^V coincides with the product of rings $R \times R \times \cdots \times R$ (n times). Show that for $n \geq 2$ and $R \neq \{0\}$, R^V always has zero divisors.

   (c) Let $V = [0,1]$ and $R = \mathbb{R}$, and consider

   $$C([0,1]) = \{f : [0,1] \,:\, f \text{ is continuous}\}\,.$$

   Show that $C([0,1])$ forms a subring of R^V, and $C([0,1])$ has zero divisors.

3. **[2+3+3 Points.]**

   (a) Give the definition of an ideal I of a ring R.

   (b) Let R be a ring with 1, and I an ideal of R with $I \cap R^\star \neq \phi$. Show that then $I = R$.

   (c) Prove that the only ideals of a division ring R are $\{0\}$ and $R = R \cdot 1$.

4. **[3+3 Points.]** Let Φ_i be the evaluation homomorphism (we use $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

   $$\Phi_i : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(i).$$

   Let $g = X^2 + 1$.

   (a) Show that $ker(\Phi_i) = (g)$.

   (b) Show that

   $$\mathbb{R}[X]/(g) \cong \mathbb{C}\,.$$

5. **[2+3+3 Points.]**

   (a) Give the definitions of a maximal ideal and a prime ideal.

(b) Show that for $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \text{ is maximal } \Leftrightarrow n \text{ is prime.}$$

(c) Show that every maximal ideal is a prime ideal.

6. **[2+3+3 Points.]** Let $R = \{a/b \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\, b \text{ odd }\}$. This is a subring of $\mathbb{Q}$.

   (a) Determine $R^\star$.

   (b) Show that each $x \in R$, $x \neq 0$, can be written as $x = 2^k \cdot u$ in a unique way, with $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $u \in R^\star$.

   (c) Show that 2 is (up to units) the only irreducible element of R. Is $2R$ a prime ideal?

7. **[4+3 Points.]** Let R be a ring and I an ideal.

   (a) Show that R and R/I are both R-modules.

   (b) Show that the canonical map

   $$\phi : R \to R/I, \quad m \mapsto \overline{m} = m + I,$$

   is a R-module homomorphism.

8. **[3+3 Points.]** Let M, N be R-modules and $f : M \to N$ an R-module homomorphism. Show that

   (a) $ker(f)$ is a submodule of M, and

   (b) $im(f)$ is a submodule of N.

Dutch Translation

1. **[3 Points.]** Bewijs dat de eenhedengroep $R^\star$ van een ring R met 1 een groep ten opzichte van de vermenigvuldiging is.

2. **[3+2+3 Points.]** Zij V een verzameling, R een ring, en $T = R^V$ de verzameling van afbeeldingen van V naar R.

   (a) Bewijs dat R^V met de optelling and vermenigvuldiging

   $$\begin{aligned} \big(f+g\big)(v) &= f(v) + g(v)\,, \\ \big(fg\big)(v) &= f(v) \cdot g(v) \end{aligned}$$

   voor $f, g : V \to R$ en $v \in R$, een ring vormt.

   (b) Geldt $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, met $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, dan zien we dat R^V dezelfde ring is als $R \times R \times \cdots \times R$ (n keer). Bewijs dat voor $n \geq 2$ en $R \neq \{0\}$, R^V steeds nuldelers heeft.

   (c) Zij $V = [0,1]$ en $R = \mathbb{R}$, en beschouw

   $$C([0,1]) = \{f : [0,1] \ : \ f \text{ is continu}\}\,.$$

   Bewijs dat $C([0,1])$ een deelring van R^V, en deze deelring heeft nog steeds nuldelers .

3. **[2+3+3 Points.]**

   (a) Geef de definitie van een ideaal I van een ring R.

   (b) Zij R een ring met 1, en I een ideaal van R met $I \cap R^\star \neq \phi$. Bewijs dat $I = R$.

   (c) Bewijs dat de enige idealen van een delingsring R de idealen $\{0\}$ en $R = R \cdot 1$ zijn.

4. **[3+3 Points.]** Zij Φ_i de evaluatiehomomorfisme (we gebruiken $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

$$\Phi_i : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(i).$$

   Zij $g = X^2 + 1$.

   (a) Bewijs dat $ker(\Phi_i) = (g)$.

   (b) Bewijs dat
$$\mathbb{R}[X]/(g) \cong \mathbb{C}\,.$$

5. **[2+3+3 Points.]**

   (a) Geef de definitie van een maximaal ideaal en van een priemideaal.

   (b) Bewijs dat voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,
$$n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \text{ is maximaal } \Leftrightarrow n \text{ is priem.}$$

   (c) Bewijs dat elke maximaal ideaal een priemideaal is.

6. **[2+3+3 Points.]** Laat $R = \{a/b \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\, b \text{ oneven }\}$. Dit is een deelring van $\mathbb{Q}$.

   (a) Bepaal $R^\star$.

   (b) Bewijs dat elke $x \in R$, $x \neq 0$, een eenduidige schrijfwijze $x = 2^k \cdot u$ heeft, met $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $u \in R^\star$.

   (c) Laat zien dat 2, op eenheden na, het enige irreducibele element van R is. Is $2R$ een priemideaal?

7. **[4+3 Points.]** Zij R een ring en I een ideaal.

   (a) Bewijs dat R en R/I R-modulen zijn.

   (b) Bewijs dat de kanonieke afbeelding
$$\phi : R \to R/I, \quad m \mapsto \overline{m} = m + I,$$
   een R-moduulhomomorfisme is.

8. **[3+3 Points.]** Laat M, N R-modulen zijn, en $f : M \to N$ een R-moduulhomomorfisme. Bewijs:

   (a) $ker(f)$ is een deelmoduul van M.

   (b) $im(f)$ is een deelmoduul van N.